Mathematical Computation
Volume 13 Issue 1, June 2025, PP. 1-14

Study on the Problem of “Catenary Pendulum”

Changrun Zhao
The No.1 middle School of Zhanyi, Yunnan, 655331, China

Abstract

The study of the “catenary pendulum” problem reveals intrinsic connections between the catenary curve and the brachistochrone (cycloid), leading to three key conclusions: (i) Among pendulums of equal length—the catenary pendulum, simple pendulum, and compound pendulum—the catenary pendulum exhibits the shortest oscillation period. (ii) The motion of the system's center of mass forms a brachistochrone curve, which constitutes the fundamental dynamic characteristic of the catenary pendulum. Notably, the midpoint of the rope has a significantly smaller amplitude than the system's center of mass. (iii) The free end of the catenary pendulum (its terminal point) represents the most dynamically active particle. Its trajectory forms an arc-shaped elliptical orbit symmetric with respect to the y-axis.

Keywords: Catenary Pendulum; Catenary; Optimal Sag; Cycloid; Rolling Circle's Initial Contact Angle

“悬绳摆”问题研究

赵长润
沾益一中，云南沾益 655331

摘 要：“悬绳摆”问题的研究揭示了悬链线与旋轮线（即最速降线）之间的内在联系，进而得出三个结论：①在长度相等的悬绳摆、单摆和复摆中，以悬绳摆的运动周期最短。②系统质心的运动构成最速降线，这是整个悬绳摆的灵魂，悬绳中点的振幅远小于系统质心的振幅。③悬绳摆末端（即自由端）是悬绳摆上最活跃的质点，它的运动轨迹是以 y 轴为对称的弧形椭圆轨道。

关键词：悬绳摆；悬链线；最佳垂度；旋轮线；滚圆起步角

1 悬绳摆的定义

均匀、柔软且不可伸长的细绳索,如果悬点固定,另一端用外力拖到某一位置后从静止释放，这样的装置就构成悬绳摆(如图 1 所示)。

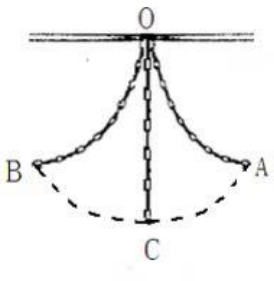


图 1

悬绳摆的初始线型可看作某一悬链线的一部分，这里只讨论一条悬链线从最低点剪断后构成悬绳摆的情形，悬绳摆的绳线是柔软的变形体，相邻质点间除张力外无其它相互作用，质量沿线长均匀分布，实验表明悬绳摆的摆动具有左右对称性，在忽略空气阻力的情况下，左右两侧对应位置悬绳的线型相同，对称轴

在竖直方向，中间线型承前启后连续变化，但线长不变，在自然界动物尾巴的摆动就是悬绳摆问题的雏形。

2 悬链线的性质

悬链线 $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x-p}{a}}+e^{-\frac{x-p}{a}})-2a$ 中，若取 $\frac{p}{a}=\ln(2+\sqrt{3})$ 或 $-\frac{p}{a}=\ln(2-\sqrt{3})$ 时，悬链线的图像具有如下性质：

（1）垂度 a 等于最低点的曲率半径，x 轴过曲率中心 D，跨度 2p=2a ln(2+$\sqrt{3}$)，整条曲线与坐标轴所夹面积为 $S_{面}=(4p-2\sqrt{3}a)\cdot a$。

（2）实际悬挂绳子的形状千差万别，但过最低点的曲率中心，垂直于对称轴切得的不同悬链线间总保持相似关系，周长比等于相似比，面积比等于相似比的平方。

（3）整条悬绳的长度 s=2$\sqrt{3}$ a，重心坐标（p,-0.619827001a）比较接近黄金分割点，此时的悬链线构成最佳垂度悬链线，在工程技术中，最小限度使用悬链线往往可以收到使用悬链线的最佳效果。

（4）两端点的切线与水平方向的夹角均为 60°。

（上述结论的证明略，为简化计算本文的悬链线也采用这种悬挂方法。）

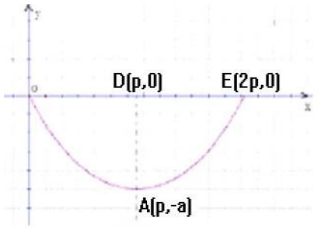


图 2

3 质心的运动路径

取悬绳摆质心轨道最高点 F 为坐标原点建立质心坐标系 $F-X_cY_c$，X_c 轴正方向水平向左，Y_c 轴正方向竖直向下，该坐标系相对于悬点坐标系 $o-xy$ 静止，这里用大小写字母区分两个坐标系，它们之间的转换关系是：

$$\begin{cases} X_c = x_F - x \\ Y_c = y_F - y \end{cases}$$

设悬绳摆在任意位置受到的约束反力为 R，重力 G，运用柯尼希质心运动定理[1]得：

$$G+R=m\frac{dV_c}{dt} \qquad \text{(矢量方程)} \qquad ①$$

等式两边点乘 $dr_c(=V_cdt)$ 得：

$$G\cdot dr_c+R\cdot dr_c=mV_c\cdot dV_c$$

由于重力做功与路径无关，只跟始末位置的高度差有关，上述方程的积分表达式可写成：

$$\int_0^{Y_c}mgdY_c+\int_0^{X_c}R_XdX_c+\int_0^{Y_c}R_YdY_c=\int_0^{V_c}d(\frac{1}{2}mV_c^2)$$

即

$$\frac{1}{2}mV_c^2=mgY_c+\int_0^{X_c}R_XdX_c+\int_0^{Y_c}R_YdY_c$$

考虑到质心运动轨迹的方程为 $Y_c=Y_c(X_c)$，该轨迹就等同于一个光滑的轨道（理想约束），约束反力 R 由悬点提供，在数值上等于光滑轨道的“弹力”，而此“弹力”处处与质心轨道垂直，对质心不做功，

换一个角度也可得出相同的结果，悬点虽受约束反力 R，但悬点不动，$dr=0$，不具备做功条件，悬点的约束反力做功$W_R=0$，即：

$$\int_0^{X_c} R_X dX_c + \int_0^{Y_c} R_Y dY_c = 0$$

也就是约束反力 R 的两个分力做功的代数和为零，因此

$$\frac{1}{2}mV_c^2 = mgY_c$$

化简得：$V_c=\sqrt{2gY_c}$。

由于质心从最高点 F（初速为零）沿曲线 $\mathrm{Y_c}=Y_c(X_c)$ 运动到最低点 H，弧长的微分

$$dS=\sqrt{(dX_c)^2+(dY_c)^2}=\sqrt{1+(\frac{dY_c}{dX_c})^2}\,dX_c=V_c\mathrm{d}t$$

所以

$$dt=\frac{dS}{V_c}=\frac{\sqrt{1+(\frac{dY_c}{dX_c})^2}}{V_c}dX_c$$

两边积分得质心从最高点 F 运动至最低点 H 所需时间

$$t_{FH}=\frac{1}{4}T=\int_0^{X_H}\frac{\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}Y_c}{dX_c})^2}}{V_c}dX_c$$

在质心速度 $V_c=\sqrt{2gY_c}$ 的条件下，可以用“变分法证明质心的运动轨迹是旋轮线的一部分”!（如图 3 所示）

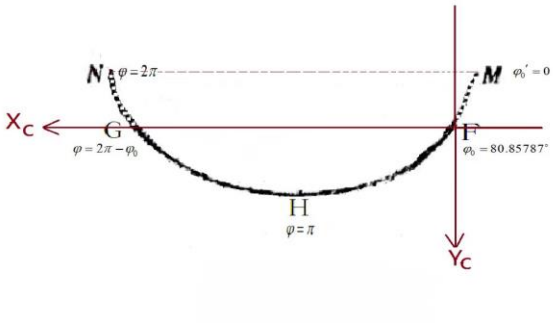


图 3

一般地

$$I[Y_c(X_c)]=\int_0^{X_H}F(X_c,Y_c,Y_c')dX_c$$

其中 $Y_c'=\frac{dY_c}{dX_c}$，保持 $\mathrm{Y_c}=\mathrm{Y_c}(X_c)$ 的两端不动（相当于过两个定点 F、H），对函数 $\mathrm{Y}_c=Y_c(X_c)$ 作一点微小改变，欲使 $I[\mathrm{Y}_c(X_c)]$ 取得极小值(最小作用原理)，被积函数 $F(X_c,Y_c,Y_c')$ 须满足欧拉方程[2]：

$$\frac{d}{dX_c}(\frac{\partial F}{\partial Y_c'})-\frac{\partial F}{\partial Y_c}=0 \qquad ②$$

这就是欧拉方程的第一种形式，考虑到一阶全微分的形式不变性：

$$dF=\frac{\partial F}{\partial X_c}dX_c+\frac{\partial F}{\partial Y_c}dY_c+\frac{\partial F}{\partial Y_c'}dY_c'$$

所以

$$\frac{dF}{dX_c}=\frac{\partial F}{\partial X_c}+\frac{\partial F}{\partial Y_c}\frac{dY_c}{dX_c}+\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\frac{d^2Y_c}{dX_c^2} \quad ③$$

又根据微分公式 $dUV=UdV+VdU$ 得

$$d[\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\cdot\frac{dY_c}{dX_c}]=\frac{\partial F}{\partial Y_c'}d(\frac{dY_c}{dX_c})+\frac{dY_c}{dX_c}d(\frac{\partial F}{\partial Y_c'})$$

所以

$$\frac{d(\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\cdot\frac{dY_c}{dX_c})}{dX_c}=\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\frac{d^2Y_c}{dX_c^2}+\frac{dY_c}{dX_c}\frac{d}{dX_c}(\frac{\partial F}{\partial Y_c'}) \quad ④$$

③-④并消去 $\frac{d^2Y_c}{dX_c^2}$ 项得：

$$\frac{dF}{dX_c}-\frac{d(\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\cdot\frac{dY_c}{dX_c})}{dX_c}=\frac{\partial F}{\partial X_c}-\frac{dY_c}{dX_c}[\frac{d}{dX_c}(\frac{\partial F}{\partial Y_c'})-\frac{\partial F}{\partial Y_c}] \quad ⑤$$

当 $\frac{dY_c}{dX_c}\neq 0$ 时，考虑到②式 $\frac{d}{dX_c}(\frac{\partial F}{\partial Y_c'})-\frac{\partial F}{\partial Y_c}=0$ ⑤式化简为：

$$\frac{d}{dX_c}(F-\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\frac{dY_c}{dX_c})=\frac{\partial F}{\partial X_c} \quad ⑥$$

这就是欧拉方程的第二种形式，当 F 不显含 X_c 时，$\frac{\partial F}{\partial X_c}=0$，欧拉方程存在首次积分：

$$F-\frac{\partial F}{\partial Y_c'}\frac{dY_c}{dX_c}=常数C \quad ⑦$$

运用于质心从F→H的运动：

$F=\sqrt{\frac{1+(\frac{dY_c}{dX_c})^2}{2gY_c}}$ 不显含 X_c，将 F 代入⑦式得：

$$\sqrt{\frac{1+Y_c'^2}{2gY_c}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2gY_c}}\cdot\frac{2Y_c'}{\sqrt{1+Y_c'^2}}\cdot Y_c'=常数C$$

化简得：

$$\sqrt{1+Y_c'^2}-\frac{Y_c'^2}{\sqrt{1+Y_c'^2}}=\sqrt{2gY_c}C$$

即

$$\frac{(1+Y_c'^2)-Y_c'^2}{\sqrt{1+Y_c'^2}}=\sqrt{2gY_c}C$$

进一步化简得质心运动的轨迹方程：

$$\sqrt{(1+Y_c'^2)Y_c}=\frac{1}{\sqrt{2g}C}$$

两边平方得：

$(1+Y_c'^2)Y_c=\frac{1}{2gC^2}$ 即 $Y_c'^2=\frac{1}{2gC^2Y_c}-1$

两边开方得：

$$Y_c' = \frac{dY_c}{dX_c} = \sqrt{\frac{1}{2gC^2Y_c} - 1}$$

用分离变量法得：$\mathrm{d}X_c = \sqrt{\frac{2gC^2Y_c}{1-2gC^2Y_c}}dY_c$

令 $Y_c = \frac{1}{2gC^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ 则两边积分得：

$$X_c = \frac{1}{gC^2}\int \sin^2\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4gC^2}[\varphi - \sin\varphi] + X_M$$

当常数 $\frac{1}{4gC^2} = R$ 时，其参数形式的通解为：

$$\begin{aligned} X_c &= R(\varphi - \sin\varphi) + X_M \\ Y_c &= R(1-\cos\varphi) + Y_M \end{aligned} \qquad ⑧$$

由于在 F 点，

$$X_c = 0 \Rightarrow X_M = -R(\varphi_0 - \sin\varphi_0)$$
$$Y_c = 0 \Rightarrow Y_M = -R(1-\cos\varphi_0)$$

而当 $\varphi = 0 \Rightarrow X_c = X_M, Y_C = Y_M$

$\varphi = 2\pi \Rightarrow X_c = X_N, Y_C = Y_N$

说明 M、N 两点构成旋轮线的两个端点，当质心从 $M \rightarrow N$ 运动时，质心运动路径 $Y_c = Y_c(X_c)$ 构成一条完整的旋轮线（也叫最速降线）。（证毕！）

4 质心运动的弧长表述

选用不同的参量，旋轮线有不同的表达方式，揭示的侧重点也有所不同！这里尝试着用弧长来表述，因为质心沿旋轮线的运动是简谐振动，而简谐振动的主要特征是回复力与位移（弧长）成正比而“方向”相反，赋予最低点 H 以振动中心的地位，则在 H 点右侧，回复力沿顺时针方向，而离开平衡位置的位移（弧长）沿“逆时针”，在 H 点左侧，回复力沿逆时针方向，离开平衡位置的位移（弧长）沿“顺时针”，同时可设旋轮线上动点 P 的切线与水平方向的夹角为 θ，孤长（HP）=s，取逆时针方向为正方向，则质心离开平衡位置向右运动时 $a_\tau = -g\sin\theta$，同时 $F_{回} = -Ks$，所以 $a_\tau = \frac{F_{回}}{m} = -\frac{K}{m}s$，即

$$-\frac{K}{m}s = -g\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{Ks}{mg}$$

考虑到三个微元之间的关系：

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = ds\cdot\sin\theta \\ dx = ds\cdot\cos\theta = \mathrm{d}s\cdot\sqrt{1-\sin^2\theta} \end{cases}$$

将 $\sin\theta$ 的值代入并积分得：

$$\begin{aligned} y &= y_H + \frac{1}{2}\frac{K}{mg}\mathrm{s}^2 \\ x &= x_H + \frac{s}{2}\sqrt{1-(\frac{Ks}{mg})^2} + \frac{mg}{2K}\arcsin\frac{Ks}{mg} \end{aligned} \qquad ⑨$$

其中 $\frac{K}{mg} = \frac{1}{4R}$，若取最低点重力势能为零，则沿 y 方向向上运动，质心克服重力作功，重力势能增加，动能减少；向下运动，重力做正功，重力势能减少，动能增加，整个系统机械能守恒！

$$E_p = mg(y - y_H) = \frac{1}{2}Ks^2$$

把弧线想象成“有弹性的细线”，则重力势能的变化类似于“弹性势能”的变化，也暗示着两种保守力场之间的关联，“弹簧振子”是在弹性力作用下的直线运动，而旋轮线是在重力作用下的曲线运动，其中动点（即质心）的运动被限制在位移（弧长）s 满足 $-4R \le s=4R\sin\theta_0 \le 4R$ 的摆线型光滑凹槽内，两者都是简谐振动，都具有等时“降落”特性，且振动周期都与振幅无关！至于旋轮线沿水平方向的运动，不涉及势能的变化，只涉及运动的合成，其中一个分运动代表动点 P 随滚圆圆心作平动，另一个分运动代表匀速圆周运动在水平方向的投影，合运动在水平方向的跨度落在 $-\pi R \le x \le \pi R$ 之间。

5 悬绳摆的周期

摆线上的各个质点，在摆动过程中虽然振幅不同，但振动的步调总是保持一致，要想确定悬绳摆的周期，只要能求出其中一个质点运动的周期，整个摆的周期也就确定了！然而除悬点外，沿着摆线方向相邻质点间的机械能发生了“传递”，对单个质点而言机械能并不守恒，要落实上述思想，唯一的希望只能寄托在系统的“质心”身上，由于质心的运动轨迹是一条旋轮线，而且摆动过程质心做的是简谐振动[3]，整个摆的运动可看成是质心的自由振动带动其它质点跟着做受迫振动，且受迫振动的频率等于质心运动的固有频率。考虑悬链线从最低点 A 剪断后的左右摆动，在两个极端位置的线型可用下列方程表出：

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{|x|-p}{a}}+e^{-\frac{|x|-p}{a}})-2a$$

这是一个偶函数，关于 y 轴对称，此时绳长 $L=\sqrt{3}a$，$\frac{p}{a}=\ln(2+\sqrt{3})$，根据质心的定义:

右侧边缘悬绳 OA 的质心 F 的坐标[4]为：

$$\overline{y_F}=\frac{1}{L}\int_O^A y\,ds=\frac{a^2}{L}\left[\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}\right]=-0.619827001a$$

$$\overline{x_F}=\frac{1}{L}\int_O^A x\,ds=\frac{a^2}{L}=0.577350269a$$

左侧边缘悬绳 OB 的质心 G 的坐标为

$$\overline{y_G}=\frac{1}{L}\int_O^B y\,ds=-0.619827001a$$

$$\overline{x_G}=\frac{1}{L}\int_O^B x\,ds=-0.577350269a$$

还有一个位置就是平衡位置，此时整根悬绳 OC 在竖直方向，呈直线分布，质心显然在悬绳的中点 H，即

$$\overline{y_H}=-\frac{L}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}a=-0.866025403a$$

$$\overline{x_H}=0$$

要使系统的质心以最短时间回到平衡位置，只需寻找一条旋轮线即最速降线，让它通过 F、H、G 三个点，在悬点坐标系 $o-xy$ 中，设所求旋轮线的参数方程为：

$$\begin{aligned} x&=\pi R-R(\varphi-\sin\varphi)\\ y&=k-R(1-\cos\varphi)\end{aligned} \qquad ⑩$$

其中，形成旋轮线的滚圆半径 R 和 k 为待定常数，为了便于研究质心运动轨迹，我们把质心附近的图像放大，图 4 还把沿直线 y=k 滚动的辅助滚圆也标注在图中，从图可以看出质心运动轨迹只占旋轮线的一部分，对应于悬绳摆从右向左摆动，滚圆做顺时针滚动，设质心的起始点 F 沿旋轮线的切线与水平方向的夹角为 θ_0，质心最高点和最低点的连线与水平方向的夹角为 α，对应于质心最高点 F，滚圆的起步角为 φ_0，Q 为滚圆圆心，根据旋轮线的性质 $\overline{FJ}$ 既是旋轮线的切线，又是滚圆的弦，由于弦切角的度数等于同弧所对圆心角的一半，所以 $\angle FQJ=2\theta_0$，半径 $\overline{QF}$ 再顺时针转过 $2\theta_0$ 时，质心 F 即到达 H，由于滚圆不打滑，$\overline{HJ}=$劣弧（FJ）$=2R\theta_0$，在 ΔFHJ 中，$\overline{HJ}>\overline{FJ}$（弧长＞弦长），所以 $\theta_0>2\alpha$。

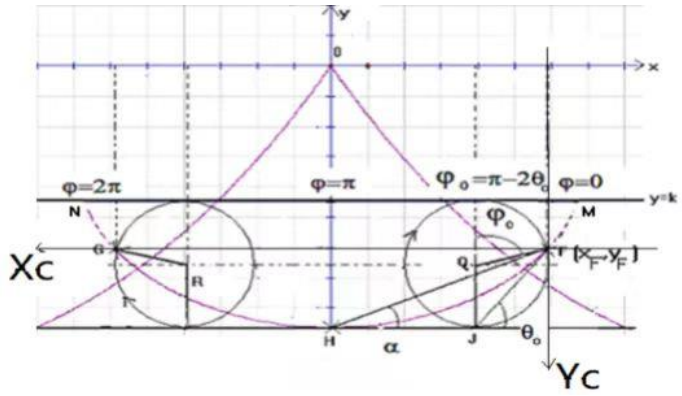


图 4

根据正切函数的定义 $\tan\alpha=\left|\dfrac{\bar{y}_F-\bar{y}_H}{\bar{x}_F-\bar{x}_H}\right|$=0.426428141

求得 α =23.0947641°，又从图中的几何关系得：

$$\left|\bar{y}_F-\bar{y}_H\right|=R+R\cos\varphi_0=R(1-\cos 2\theta_0)=2R\sin^2\theta_0$$

$$\left|\bar{x}_F-\bar{x}_H\right|=\overline{HJ}+R\sin\varphi_0=R(2\theta_0+\sin 2\theta_0)$$

所以 $\tan\alpha=\dfrac{2\sin^2\theta_0}{2\theta_0+\sin 2\theta_0}=0.426428141$，这是一个含 θ_0 的超越方程，直接求 θ_0 有难度，由于 $\theta_0>2\alpha$ =46.18952822°，可以采用尝试法逐渐逼近，数值计算过程见下表 1：

表 1 θ_0 的取值过程

θ_0 虚拟取值	$tg\alpha=\dfrac{2\sin^2\theta_0}{2\theta_0+\sin 2\theta_0}$	与 $tg\alpha=0.426428141$ 比较
$\theta_0=50^0$	$tg\alpha=0.429886183$	偏大
$\theta_0=49^0$	$tg\alpha=0.421808053$	偏小
$\theta_0=49.5^0$	$tg\alpha=0.425854201$	偏小
$\theta_0=49.6^0$	$tg\alpha=0.426661746$	偏大
$\theta_0=49.55^0$	$tg\alpha=0.426258044$	偏小
$\theta_0=49.56^0$	$tg\alpha=0.426338796$	偏小
$\theta_0=49.57^0$	$tg\alpha=0.426419542$	偏小
$\theta_0=49.58^0$	$tg\alpha=0.426500283$	偏大
$\theta_0=49.571^0$	$tg\alpha=0.426427616$	非常接近
$\theta_0=49.5711^0$	$tg\alpha=0.426428424$	非常接近
$\theta_0=49.57109^0$	$tg\alpha=0.426428343$	非常接近
$\theta_0=49.57108^0$	$tg\alpha=0.426428262$	非常接近
$\theta_0=49.571065^0$	$tg\alpha=0.426428141$	可替代标准值

取 $\theta_0=49.571065^\circ$，则与 F 点对应的滚圆起步角 $\varphi_0=\pi-2\theta_0=80.85787^\circ$

将 $\overline{x_F}=0.577350269a$，$\overline{y_F}=-0.619827001a$，$\varphi_0=80.85787^0$ 代入⑩得：

$$R=\frac{\overline{x_F}}{\pi-\varphi_0+\sin\varphi_0}=0.212444374a$$

$$k = \overline{y_F} + R(1-\cos\varphi_0) = -0.441136655a$$

由于旋轮线在最低点的曲率半径 $\rho = 4R$，所以在旋轮线上运动的物体周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}} = 1.843667536\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

这就是悬链线从最低点剪断后构成的悬绳摆周期公式。

而摆长为 $L = \sqrt{3}a$ 的单摆周期：

$$T_{单} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}a}{g}} = 2.632148026\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

长度为 $L = \sqrt{3}a$ 的均匀细杆绕一个端点转动的周期:

$$T_{复} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\mathrm{mg}b}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}a}{3g}} = 2.149139864\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

通过比较明显看出线长相同的三种摆以悬绳摆的周期最短。

更为重要的是悬绳摆的质心沿旋轮线的大角度摆动是简谐振动，如果用积分法可求得从平衡位置到振幅位置的最大弧长：$S_{\max} = -\int_{\pi}^{\varphi_0}\sqrt{(\frac{dx}{d\varphi})^2 + (\frac{dy}{d\varphi})^2}\,d\varphi = 4R\cos\frac{\varphi_0}{2} = 0.646859894a$

如果从平衡位置开始计时，质心的运动规律可表述为：

$\mathrm{s} = S_{\max}\sin\omega t = 4R\sin\theta_0\cdot\sin\omega t$，其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.084794281\sqrt{\frac{g}{a}}$$

通过对其求导得：

$$v = \frac{ds}{dt} = S_{\max}\omega\cos\omega t$$

为了计算方便，取 a =10m, g=9.8m/s^2, 当 t=0 时，$v_H = S_{\max}\omega = 6.946573737m/s$

而由质心机械能守恒得到的

$$v'_H = \sqrt{2g(y_F - y_H)} = 6.946573756m/s$$

两者在计算精度范围内高度吻合，说明质心的运动遵循机械能守恒定律，质心运动路径是旋轮线的隐含物理条件得到满足!

6 悬点的约束反力

设半根悬链线重力为 mg, 在竖直位置悬点对悬绳的拉力为 F, 根据质心运动定理得：$F - mg = m\frac{{V_H}^2}{\rho}$，其中 $\rho = 4R$，$\frac{1}{2}m{V_H}^2 = mg(y_F - y_H)$，相关数据代入得 F=1.57944204mg；至于在最高点，悬点拉力要区分为悬链线剪断前还是剪断后，剪断前是静力学问题，悬点拉力的竖直分量跟重力平衡，由 $F\sin 60^\circ = mg$ 得: $F = 1.154700538mg$；剪断后是动力学问题，断开的瞬间，虽然此时的速度仍为零，但有切向加速度，轨道的约束反力只可能由悬点的拉力提供 $F = \mathrm{mg}\cos\theta_0 = mg\cos 49.571065^\circ = 0.648504403mg$，这说明悬链线在最低点断开前后悬点拉力发生突变；对于旋轮线上的其它任意一点 $I(x_c, y_c)$, 可根据曲率半径[5]的定义推出：

$$\rho = \left|\frac{[1+(\frac{dy_c}{dx_c})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y_c}{{dx_c}^2}}\right| = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$$

曲率半径与坐标系的选择无关，再结合

$$F - mg\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}) = m\frac{V_I^2}{\rho}$$

$$\frac{1}{2}mV_I^2 = mg(y_F - y_I)$$

得：

$$F = mg\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}mg\frac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

这就是确定任意位置约束反力的关系式。

（1）当$\varphi = \varphi_0$时

$$F = mg\sin\frac{\varphi}{2} = 0.648504403mg$$

（2）当$\varphi = \pi$时

$$F = mg + \frac{1}{2}mg(\cos\varphi_0 + 1) = 1.579442038mg$$

与前面的计算相比尾数略有出入，这是由于滚圆起步角计算不够精确引进的微小误差。

（3）当$\varphi = 2\pi - \varphi_0$时，$F = 0.648504403mg$，与$\varphi = \varphi_0$的结论相同，系统具有左右对称。

7 端点的运动轨迹

有一种说法认为悬链线在最低点剪断，端点落下的轨迹是曳物线，这是不正确的，虽然悬链线的渐开线是曳物线（如图 5 所示），但这是对外形像悬链线一样的刚性物体而言的，如果把悬链线从最低点剪断，构成“悬绳摆”，由于悬绳是柔性物体，其形状随时间改变，自由端的轨迹并非是曳物线，为了探究端点的

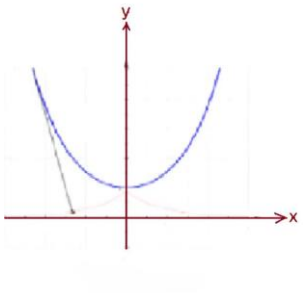


图 5

运动轨迹，本文将悬链线的线长进行 16 等分，在竖直位置，16 个等分点的坐标可直接标出，在初始位置，由于线型是悬链线，可利用积分法反过来求出各等分点的坐标，用什么样的曲线来模拟这些等分点的运动轨迹呢？通过种种尝试失败后发现：抓住曲线所隐含的定性趋势[6]才能找到解决问题的钥匙！因为在这 16 个点中，越靠近悬点悬绳越直，等分点的运动越接近于圆，这是跟实际情况相吻合的，而与圆最亲近的曲线莫若椭圆，如果用椭圆来拟合这些等分点的运动，则更能体现曲线所具有的内在价值，更能从总体上把握全局。我们知道过两个非对称点就可以确定一个椭圆方程，由于椭圆的中心在悬点，长轴在 y 轴上，椭圆方程的通项公式可设为：

$$\frac{x^2}{b_i^2} + \frac{y^2}{a_i^2} = 1 \qquad (a_i > b_i > 0)$$

下面先介绍如何确定初始位置各等分点的坐标，设悬链线上有一动点 P（x, y），且 P 到悬点 0 的绳长为 s, 即 孤长（OP）= s, 半条悬链线长$L = \sqrt{3}a$，由于$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x-p}{a}} + e^{-\frac{x-p}{a}}) - 2a$，

$$s = \int_0^x \sqrt{(\frac{dy}{dx})^2 + 1}dx = ash\frac{x-p}{a}\Big|_0^x,$$

考虑到 $\frac{p}{a}=\ln(2+\sqrt{3})$，且在第一个 $\frac{1}{4}T$ 内（$x>0$），上式化简为

$$\frac{x}{a}=\ln\frac{-(\sqrt{3}-\frac{s}{a})+\sqrt{(\sqrt{3}-\frac{s}{a})^2+1}}{2-\sqrt{3}}$$

这就是确定各等分点在起始位置时的横坐标公式，求得横坐标，再代入悬链线方程即可求出对应点的纵坐标

$$\frac{y}{a}=\sqrt{(\sqrt{3}-\frac{s}{a})^2+1}-2$$

这样就可以得出 16 个等分点所在椭圆的基本参数（见表 2）：

表 2 16 个等分点的数值计算表

竖直位置坐标	起始位置坐标	半长轴 a_i	半短轴 b_i
$x_{1,0}'=0$	$x_{1,0}=0.055428914a$	$a_1=0.108253175a$	$b_1=0.10823932a$
$y_{1,0}'=-\frac{1}{16}L$	$y_{1,0}=-0.092981712a$		
$x_{2,0}'=0$	$x_{2,0}=0.113602985a$	$a_2=0.21650635a$	$b_2=0.216389978a$
$y_{2,0}'=-\frac{2}{16}L$	$y_{2,0}=-0.184270119a$		
$x_{3,0}'=0$	$x_{3,0}=0.174745173a$	$a_3=0.324759526a$	$b_3=0.324346691a$
$y_{3,0}'=-\frac{3}{16}L$	$y_{3,0}=-0.273596585a$		
$x_{4,0}'=0$	$x_{4,0}=0.239093453a$	$a_4=0.433012701a$	$b_4=0.431983029a$
$y_{4,0}'=-\frac{4}{16}L$	$y_{4,0}=-0.360640368a$		
$x_{5,0}'=0$	$x_{5,0}=0.306897501a$	$a_5=0.541265877a$	$b_5=0.539147544a$
$y_{5,0}'=-\frac{5}{16}L$	$y_{5,0}=-0.445018086a$		
$x_{6,0}'=0$	$x_{6,0}=0.378412635a$	$a_6=0.649519052a$	$b_6=0.645659818a$
$y_{6,0}'=-\frac{6}{16}L$	$y_{6,0}=-0.526271734a$		
$x_{7,0}'=0$	$x_{7,0}=0.45388955a$	$a_7=0.757772228a$	$b_7=0.751306392a$
$y_{7,0}'=-\frac{7}{16}L$	$y_{7,0}=-0.603855756a$		
$x_{8,0}'=0$	$x_{8,0}=0.533558279a$	$a_8=0.866025403a$	$b_8=0.855837402a$
$y_{8,0}'=-\frac{8}{16}L$	$y_{8,0}=-0.677124344a$		
$x_{9,0}'=0$	$x_{9,0}=0.617604528a$	$a_9=0.974278579a$	$b_9=0.958964784a$
$y_{9,0}'=-\frac{9}{16}L$	$y_{9,0}=-0.745321256a$		
$x_{10,0}'=0$	$x_{10,0}=0.706136874a$	$a_{10}=1.082531755a$	$b_{10}=1.060363683a$
$y_{10,0}'=-\frac{10}{16}L$	$y_{10,0}=-0.807575998a$		
$x_{11,0}'=0$	$x_{11,0}=0.799144515a$	$a_{11}=1.19078493a$	$b_{11}=1.15967898a$
$y_{11,0}'=-\frac{11}{16}L$	$y_{11,0}=-0.862912162a$		

$x_{12,0}'=0$ $y_{12,0}'=-\frac{12}{16}L$	$x_{12,0}=0.896448237a$ $y_{12,0}=-0.910275264a$	$a_{12}=1.299038106\,a$	$\mathrm{b}_{12}=1.256539293\,a$
$x_{13,0}'=0$ $y_{13,0}'=-\frac{13}{16}L$	$x_{13,0}=0.997651971a$ $y_{13,0}=-0.948587259a$	$a_{13}=1.407291281a$	$b_{13}=1.35058008a$
$x_{14,0}'=0$ $y_{14,0}'=-\frac{14}{16}L$	$x_{14,0}=1.102108288a$ $y_{14,0}=-0.976830903a$	$a_{14}=1.515544457a$	$b_{14}=1.441475526a$
$x_{15,0}'=0$ $y_{15,0}'=-\frac{15}{16}L$	$x_{15,0}=1.208915046a$ $y_{15,0}=-0.994157691a$	$a_{15}=1.623797632a$	$b_{15}=1.528975183a$
$x_{16,0}'=0$ $y_{16,0}'=-\frac{16}{16}L$	$x_{16,0}=1.316957897a$ $y_{16,0}=-a$	$a_{16}=1.732050808a$	$b_{16}=1.61293743a$

适当选择单位长度，可画出上述 16 个等分点的运动轨迹（如图 6 所示）。

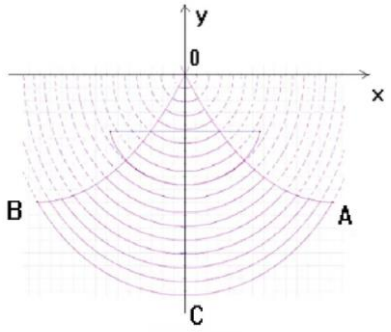


图 6

从图可以看出：

（1）就 16 个椭圆而言，在长轴上，$a_{n+1}-a_n=$常数，但在短轴上，$\mathrm{b}_{n+1}-b_n$ 由内向外逐渐递减。

（2）从上到下椭圆离心率越来越大，反之越靠近悬点，椭圆越接近于圆。

（3）悬绳的摆动具有“驻波特性”，悬点即为“波节”，端点即为“波腹”，任意时刻的悬绳线型构成“同相面”，$\frac{\mathrm{s_i}}{S_{i,\max}}=\frac{s_{i+1}}{S_{i+1,\max}}=\sin\omega t$，反映同一时刻不同质点离开各自平衡位置的路程分布情况（线长不变），可用照相机来拍摄，这是波动图像的特征。

（4）若从平衡位置开始计时，任意质点的运动满足 $\mathrm{s_i}=S_{i,\max}\sin\omega t$，其中 s_i 为质点离开平衡位置的弧长，当 $\omega t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{s_i}=S_{i,\max}$，满足边界条件；质点的速度满足 $\mathrm{v_i}=\frac{d\mathrm{s}_i}{dt}=\omega S_{i,\max}\cos\omega t=V_{i,\max}\cos\omega t$，当 $\omega t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{v_i}=0$，满足初始条件。

（5）中点 $\mathrm{s}_8=S_{8,\max}\sin\omega t=0.384830215a\cdot\sin\omega t$，$\mathrm{v}_8=\omega S_{8,\max}\cos\omega t$，这里 $V_{8,\max}=\omega S_{8,\max}=4.132659158\mathrm{m}/s<v_H=6.946573737m/s$，说明系统质心“上蹿下跳”，质心的运动比悬绳中点的运动更加活跃！

（6）用积分法可求出整条悬绳在半周期内扫过的面积 $S_{扫}=2.182086004a^2$。

8 端点运动的动力学分析

质心的运动与端点的运动，在形式上看都在做简谐振动，但其背后的动力学机制有很大的差别，质心的回复力只由质心重力沿悬轮线（轨道）切线方向的分力提供，属自由振动；而悬绳末端作受迫振动的回复力由末端质点（对应 i=16）自身重力与相邻前质点间的张力 T 共同提供，末端质点运动轨迹（ ACB ）弧所在的椭圆方程为：

$$\begin{cases} x = b_{16}\sin\psi \\ y = -a_{16}\cos\psi \end{cases}$$

其中 $a_{16} = \sqrt{3}a = 1.732050808a, b_{16} = 1.61293743a$，端点运动的弧长 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$，即

$$ds = \sqrt{(b_{16}\cos\psi)^2 + (a_{16}\sin\psi)^2}\,d\psi$$

两边积分得整个椭圆周长 $L = 10.51191529a$ [7]，端点运动的振幅

$$S_{\max} = a_{16}\int_0^{\psi_0}\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}\,d\psi$$

其中 $e = \sqrt{1 - (\frac{b_{16}}{a_{16}})^2} = 0.364432366$

与 A 点坐标对应的 ψ_0 满足：

$\left|\frac{x_A}{y_A}\right| = \frac{b_{16}}{a_{16}}\tan\psi_0 \Rightarrow \tan\psi_0 = \sqrt{2}$ 即 $\psi_0 = 54.73561032^\circ$，进一步估算得：

$S_{\max} = 1.564138292a < \frac{1}{4}L = 2.627978823a$，若从平衡位置（最低点）开始计时，则端点的运动方程可以写为：

$$s = S_{\max}\sin\omega t,$$

又

$$v = \frac{ds}{dt} = S_{\max}\omega\cos\omega t$$

其中

$$V_{\max} = S_{\max}\omega = 16.79714894\,m/s$$

为了便于前后数据间的比较，这里也取 a=10m, g=9.8m/s^2，若沿轨道切线和法线建立自然坐标系，张力 T 的两个分力记为 F_τ 和 F_n，同时设椭圆切线与水平方向的夹角为 θ，末端质点的质量为 Δm，由牛顿第二定律得：

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -(g\sin\theta + \frac{F_\tau}{\Delta m}) = -\frac{K}{\Delta m}s$$

$$\frac{F_n}{\Delta m} - g\cos\theta = \frac{v^2}{\rho}$$

其中 $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$，$s = S_{\max}\sin\omega t$，$\omega = \sqrt{\frac{K}{\Delta m}} = \sqrt{\frac{g}{4R}}$，

$$\rho = \left|\frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right| = \frac{b_{16}^2}{a_{16}}\left\{1 + [(\frac{a_{16}}{b_{16}})^2 - 1]\frac{x^2}{b_{16}^2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

由此可进一步求出：

（1）在切线方向，末端质点作简谐振动的动力学方程为：

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

（2）端点在振幅位置的速度 $v_0=0$，切向加速度 $a_\tau=g\sin\theta_0+\frac{F_\tau}{\Delta m}=\omega^2 S_{\max}$ 取最大值。

（3）末端在最低点的向心加速度 $a_n=\frac{V_{\max}^{\ 2}}{\rho}=\frac{a_{16}V_{\max}^{\ 2}}{b_{16}^{\ 2}}$，端点的最大速度 $V=V_{\max}=\omega S_{\max}=16.79714894m/s$，超过中点最大速度的 4 倍，这是所有质点“众星捧月”的结果，端点运动的能量充足，运动的振幅也是最大。（为前后对比的需要，这里也同样取 a=10m, g=9.8m/s^2）。

9 悬绳扫过的面积

悬绳摆在半周期内扫过的面积可以用积分法求出:

（1）先算半条悬链线与坐标轴所夹的面积

$$S_{\mathrm{I}}=\int_0^p y\,dx=\frac{a}{2}\int_0^p (e^{\frac{x-p}{a}}+e^{-\frac{x-p}{a}})dx-2a(p-0)$$

积分得 $S_{\mathrm{I}}=\sqrt{3}a^2-2a^2\ln(2+\sqrt{3})=-0.901864985a^2<0$，面积为负，表示图形在 x 轴下方。

（2）求椭圆弧（CA）与坐标轴所夹图形（包含 S_{I}）的面积

$$S_{\mathrm{II}}=\int_0^p y\,dx=-a_{16}\int_0^p\sqrt{1-(\frac{x}{b_{16}})^2}\,dx$$

进而求得

$$S_{\mathrm{II}}=-a_{16}b_{16}\int_0^{\psi_0}\cos^2\psi\,d\psi=-a_{16}b_{16}[\frac{1}{2}\psi_0+\frac{1}{4}\sin 2\psi_0]$$

其中 $\sin 2\psi_0=\frac{2\tan\psi_0}{1+\tan^2\psi_0}$，

把 $\tan\psi_0=\sqrt{2}$ 及 $\psi_0=54.73561032^\circ$=0.955316618弧度

代入得 S_{II}=-1.992907988a^2

所以悬绳摆在半周期扫过的面积

$$S_{扫}=2\left|S_{\mathrm{II}}-S_{\mathrm{I}}\right|=2.182086004a^2,$$

这一面积略小于 $\frac{1}{4}$ 椭圆面积（$\frac{1}{4}S_{椭}=\frac{1}{4}\pi a_{16}b_{16}=2.194158664a^2$）。

10 结语

一个简谐振动的方程 $s_i=S_{i,\max}\sin\omega t$ 统一了悬绳摆上所有质点（包括系统质心）的运动，通过对悬绳摆问题的深入研究，使人们对“物理学的尽头是数学”有了更加直观的体悟，也让我们惊叹于大自然的对立统一与和谐，连单一质点（即单摆）的大角度摆动都无法精确求解，无穷质点组成的悬绳摆的大角度摆动居然“步调一致”地回归简谐振动，这是一种怎样的杰作，只有大自然自己才能心领神会，也许动物尾巴的摆动是以最小的能量注入保护臀部最大面积的免遭蚊虫叮咬，这是“造物主”的鬼斧神工，也是科学与艺术结合的典范！

参考文献

[1] 周衍柏.理论力学.高等教育出版社， 1985.125-128

[2] 郭大钧.大学数学手册.山东科学技术出版社，1985.487-487

[3] 周培源.理论力学.人民教育出版社，1952.287-289

[4] 华罗庚.高等数学引论(第二分册).科学出版，1963.13-14

[5] B.И.斯米尔诺夫著孙念增译，高等数学教程（第一卷）.人民教育出版社， 1979.180-183

[6] 赵凯华.定性与半定量物理学.高等教育出版社，1991.1-6

[7] 赵长润.椭圆周长的初等公式.数学计算(中英文版)，2023, 11(2): 7-20.

【作者简介】



赵长润（1966-），男，大理白族，沾益一中物理高级教师，主要从事物理教学和数理科学研究，对自然科学有浓厚兴趣。