Development of Energy Science
November 2014, Volume 2, Issue 4, PP.24-33

Bayesian Estimation of Value-at-risk Based on Gray Peaks over Threshold

***Ruiqing Wang*[#]**

Department of Software Engineering, Hainan College of Software Technology, Qionghai Hainan 571400, China

[#]Email: ayrqwang@163.com

Abstract

A two-stage model for estimating value-at-risk based on grey system and extreme value theory is proposed. Firstly, in order to capture the dependencies, seasonalities and volatility-clustering, an GM(1,2) model is used to filter electricity price series. In this way, an approximately independently and identically distributed residual series with better statistical properties is acquired. Then peaks over threshold is adopted to explicitly model the tails of the residuals of GM(1,2) model, and accurate estimates of electricity market value-at-risk can be produced. For conquering the difficulty lacking for sample data over threshold, Bayesian estimation based on Markov Chain Monte Carlo simulation is used to estimate the parameters of peaks over threshold model. The empirical analysis shows that the proposed model can be rapidly reflect the most recent and relevant changes of electricity prices and can produce accurate forecasts of value-at-risk at all confidence levels, and the computational cost is far less than the existing two-stage value-at-risk estimating models, further improving the ability of risk management for electricity market participants.

Keywords: Value-at-risk; Grey System Theory; Extreme Value Theory; GM(1,2); Peaks Over Thresholds; Bayesian Estimation

基于灰色阈值模型风险价值的贝叶斯估计*

王瑞庆

海南软件职业技术学院 软件工程系，海南 琼海 571400

摘　要：基于现货电价具有信息不完全和不确定的特征，提出了一个基于灰色系统和极值理论的两阶段风险价值计算模型。该模型首先采用灰色 GM(1,2)模型对电价序列进行过滤，以获得统计特性更好的独立同分布残差序列，然后运用极值理论的阈值模型直接拟合残差序列的尾部分布，从而获得准确有效的风险价值估计结果。采用基于马尔可夫链蒙特卡罗模拟的贝叶斯方法估计阈值模型的参数，克服了超阈值样本数据匮乏的问题。实证分析表明：该模型能对现货电价的变化做出迅速的反应，风险价值的估计结果在各置信水平下均准确有效，其计算工作量远小于现有的两阶段风险价值计算模型，可进一步提高电力市场参与者使用风险价值进行风险管理的能力。

关键词：风险价值；灰色系统理论；极值理论；GM(1,2)模型；阈值模型；贝叶斯估计

引言

市场竞争机制的引入在为电力市场参与者创造更多获利机会的同时，也带来了前所未有的价格波动风险。电能不能大规模有效存储和供需的实时平衡性约束，使得电力价格比传统商品价格的波动更加剧烈。如果不能有效地评估和控制电价波动风险，可能会给电力市场参与者带来灾难性的后果，如美国加州电力市场的失败直接导致了当地两大电力公司出现高达 200 亿美元的巨额损失，濒临破产边缘[1]。电力市场一旦发生金融风险，将对社会、经济产生比金融市场风险更为严重的负面影响，因此如何有效地识别、评估、控制电力市场金融风险是一个亟待解决的问题。

*基金资助：受海南省自然科学基金支持资助（611126）。

风险价值(VaR)方法作为一种可以事前计算风险的管理方法，克服了传统方法只能事后评价的缺陷，在实践中得到了广泛的应用。文献[2,3]以 VaR 作为电力市场风险测度，应用基于正态分布的 Delta 方法评估了电力公司的购电风险。文献[4]使用 Copula 函数处理电价与负荷的相关性，讨论了电价和负荷服从正态分布时电力公司的购电风险。文献[5]假设电价服从正态分布，使用蒙特卡罗模拟方法分析了不同报价策略对发电商售电风险的影响，结果表明发电商基于边际成本报价时风险最小。文献[6]引入容量充裕度和必须运行率作为外生解释变量来描述电价与市场供需状况及发电商市场力之间的关系，使用残差服从正态分布的广义自回归条件异方差(N-GARCH)模型评估了电力市场的电价波动风险。文献[7]考虑到电价波动的非对称性（杠杆效应），使用残差服从正态分布的指数 GARCH (N-EGARCH)模型计算了电网公司的市场风险。文献[8]针对 N-GARCH 模型不能有效处理损益数据分布尖峰厚尾的问题，提出了一种基于自助抽样的 N-GARCH 偏差校正模型，在一定程度上提高了 VaR 的估计精度。上述研究都针对正态分布给出 VaR 的计算公式，不能很好地刻画损益序列的尖峰厚尾特征。文献[9]引入具有更厚尾部的分形分布来描述电力市场现货电价和期货电价的分布，以 VaR 作为风险约束，利用投资组合理论分析了供电公司的最优购电策略。文献[10]使用正态密度函数的 Gram-Charlier 展开和学生 t 分布来描述 GARCH 模型的残差分布，建立了考虑电价多季节性的 GARCH-VaR 计算模型，结果表明基于正态密度函数 Gram-Charlier 展开的 VaR 估计结果准确有效。

文献[11]基于宾夕法尼亚-新泽西-马里兰(PJM)电力市场的历史数据，采用 GARCH 模型分析了残差的分布设定对 VaR 估计结果的影响，结果表明 VaR 的估计精度严重信赖于残差的分布假定。极值理论(EVT)是研究次序统计量极端值分布特征的理论,不需对样本数据的分布形式作出任何设定，具有超越样本数据的估计能力，能准确地描述分布的尾部特征。文献[12]将阈值模型(POT)应用于电力市场的风险评估，结果表明由 POT 模型估计的 VaR 在 95-99%置信水平下准确有效，但当置信水平大于 99%时电价序列的强相关性将使估计结果产生较大的误差。因此，文献[13]提出先使用自回归 GARCH 模型对电价序列进行过滤，以获得近似独立同分布的归一化残差序列，然后再使用 EVT 分析残差的尾部分布特征，文献[14,15]进一步提出应采用 EGARCH 模型对电价序列进行过滤，以便更好地描述电价波动的非对称特性，结果表明(E)GARCH-EVT 方法能对电价的变化做出比较迅速的反应，其计算结果在波动较为剧烈的电力市场中表现良好。考虑到电价的均值回复、异方差、尖峰跳跃、多季节性及其与负荷、气候等影响因素的相关性，文献[16,17]应用残差服从有偏 t 分布和正态分布 Gram-Charlier 展开的多周期 ARMAX-GARCH 模型对电价序列进行过滤，获得了统计特性更好的归一化残差序列，进一步提高了 VaR 估计结果的有效性。

使用 GARCH 类模型对电价序列进行过滤虽然可以获得近似独立同分布的残差序列，但模型的高度非线性，导致求解考虑高阶矩 GARCH 类模型时的计算工作量过大，阻碍了该方法在实际中的广泛应用。考虑到现货电价具有信息不完全和不确定的性质,符合灰色变量的特征，因此本文提出了一个基于灰色系统和极值理论的两阶段 VaR 计算模型（称为 GM(1,2)-POT-VaR）。第一阶段采用灰色 GM（1,2）模型对电价序列进行预处理，第二阶段使用 POT 模型对预处理后的残差序列的尾部分布直接建模。基于 PJM 电力市场历史数据的实证分析表明，该模型的计算结果在各置信水平下均精确有效，与文献[12-17]相比，其计算工作量大大降低，进一步提高了电力市场参与者使用 VaR 进行风险管理的能力。

1 灰色 GM(1,2)模型

灰色模型是以灰色生成函数概念为基础、以微分拟合为核心的建模方法，具有所需原始信息少、预测结果可检验等优点。GM(1,2)是双序列一阶线性动态模型，通过对原始数据作一次累加处理，用微分方程来逼近拟合。设原始电价和负荷数据序列分别为 $X_1^{(0)}=\{x_1^{(0)}(k)\}$ 和 $X_2^{(0)}=\{x_2^{(0)}(k)\}$, $k=1,2,\cdots,n$ 。对 $x_1^{(0)}(k)$ 和 $x_2^{(0)}(k)$ 作一次累加生成，可得生成电价序列 $X_1^{(1)}=\{x_1^{(1)}(k)\}$ 和生成负荷序列 $X_2^{(1)}=\{x_2^{(1)}(k)\}$，其中 $x_i^{(1)}(k)=\sum_{j=1}^{k}x_i^{(0)}(j)$, $i=1,2,k=1,2,\cdots,n$。则生成电价序列 $x_1^{(1)}(k)$ 的 GM(1,2)模型为：

$$x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=bx_2^{(1)}(k) \tag{1}$$

其相应的白化微分方程为：

$$\frac{dx_1^{(1)}(t)}{dt}+ax_1^{(1)}(t)=bx_2^{(1)}(t) \tag{2}$$

其中，$dx_1^{(1)}(t)/dt$ 为序列 $X_1^{(1)}$ 的灰导数，a 和 b 为待辨识参数，$z_1^{(1)}(k)=\lambda x_1^{(1)}(k)+(1-\lambda)x_1^{(1)}(k-1)$ 为灰色模型的背景值（$0\le\lambda\le1$）。若记 $a=[a,b]^T$，则由最小二乘法可得：

$$a=(B^TB)^{-1}B^TY_N \tag{3}$$

其中

$$Y_N=\left[x_1^{(0)}(2),x_1^{(0)}(3),\cdots,x_1^{(0)}(n)\right]^T$$

$$B=\begin{bmatrix}-\lambda x_1^{(1)}(2)-(1-\lambda)x_1^{(1)}(1) & x_2^{(1)}(2)\\ -\lambda x_1^{(1)}(3)-(1-\lambda)x_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(3)\\ \vdots & \\ -\lambda x_1^{(1)}(n)-(1-\lambda)x_1^{(1)}(n-1) & x_2^{(1)}(n)\end{bmatrix}$$

求出参数 a 后，令 $x_1^{(1)}(1)=x_1^{(0)}(1)$，可得白化微分方程的离散解：

$$x_1^{(1)}(k)=\left(x_1^{(0)}(1)-\frac{b}{a}x_2^{(1)}(k)\right)e^{-a(k-1)}+\frac{b}{a}x_2^{(1)}(k) \tag{4}$$

经一次累减还原后，可得原始数据序列的灰色预测值

$$x_1^{(0)}(k)=x_1^{(1)}(k)-x_1^{(1)}(k-1) \tag{5}$$

采用以上模型进行电价预测，当系统发展系数 a 和驱动系数 b 为负值时会出现无效的预测结果。为此将GM(1,2)模型的系数修正如下：

$$x_1^{(1)}(k)=\left(x_1^{(0)}(1)-\left|\frac{b}{a}\right|x_2^{(1)}(k)\right)e^{-|a|(k-1)}+\left|\frac{b}{a}\right|x_2^{(1)}(k) \tag{6}$$

随着电力市场的运营，新的电价数据不断涌现，为了充分利用当前数据中包含的丰富信息，本文采用等维新息处理，即在预测模型中将每个新得到的信息送入数据序列，同时去除一个最陈旧的数据，达到数据信息的新陈代谢。董立立等[18]对新息 GM(1,1)模型的研究表明新息灰色模型方法简单、计算量小、结果客观可靠。

2 极值理论 POT 模型

极值理论(EVT)是一种测量极端市场条件下风险损失的常用方法，它具有超越样本数据的估计能力，可以准确地描述分布尾部的分位数。POT 模型是极值理论中最有用的模型之一，它对所有超过某一充分大阈值的样本数据进行建模，可以有效地使用有限的极端观测值。

2.1 POT 估计模型

POT 模型是极值理论中常用的方法之一，它对独立同分布的样本数据中超过某一阈值的部分进行建模。设随机变量 Z 的分布函数为 $F_z(\ )$，对于给定的阈值 u，定义 $F_u(\ )$为超过阈值 u 的超额条件分布函数，则：

$$F_u(y)=\text{Prob}(Z-u\le y\mid Z>u)=\frac{F_z(u+y)-F_z(u)}{1-F_z(u)}=\frac{F_z(z)-F_z(u)}{1-F_z(u)} \tag{7}$$

式中，$y=z-u$ 表示超额损失。

Balkema、De Haan[19]和 Pickands[20]证明：对于充分大的阈值，超额损失分布函数 $F_u(y)$ 收敛于广义帕累托分布(GPD)$G_{\xi,\beta}(y)$：

$$G_{\xi,\beta}(y)=\begin{cases}1-\left(1+\dfrac{\xi}{\beta}y\right)^{-1/\xi} & \xi\neq 0\\ 1-e^{-y/\beta} & \xi=0\end{cases} \tag{8}$$

式中，$\xi\geq 0$ 时，$y\in[0,\infty)$；$\xi<0$ 时，$y\in[0,-\beta/\xi]$。ξ 称为形状参数，$\beta>0$ 称为尺度参数。当 $\xi=0$ 时，GPD 对应于指数分布；当 $\xi<0$ 时，GPD 对应于 Pareto Ⅱ分布，是一种薄尾分布；当 $\xi>0$ 时，GPD 分布函数为普通 Pareto 分布，是一种厚尾分布，金融时间序列一般属于此类，因此在下面我们只讨论 $\xi>0$ 的情形。

对于充分大的阈值 u，如果以 T 代表样本容量，T_u 代表超额损失的样本点数，用实际累积分布函数值 $(T-T_u)/T$ 作为 $F_z(u)$的估计值，将(8) 式代入(7) 式得到：

$$F_z(z)=1-\frac{T_u}{T}\left(1+\frac{\xi}{\beta}(z-u)\right)^{-1/\xi} \tag{9}$$

式中，$z>u$。则由(9)式可以求出在给定置信水平 p ($p\geq 90\%$)下 z_t 的 p 分位数估计值

$$F_z^{-1}(p)=u+\frac{\beta}{\xi}\left(\left(Tp/T_u\right)^{-\xi}-1\right) \tag{10}$$

阀值 u 的合理确定是正确估计参数 ξ 和 β 的前提。u 选取过高，超额数据太少，估计出的参数方差很大；u 选取过低，则不能保证超额分布的收敛性，使估计产生较大偏差。若 $Z_{(1)}>Z_{(2)}>\ldots>Z_{(n)}$表示独立同分布的次序统计量，则样本平均超额函数定义为[21]：

$$e(u)=\frac{\sum_{i=k}^{n}(Z_i-u)}{n-k+1} \tag{11}$$

式中，$k=min\{i|Z_i>u\}$。平均超额函数图为点$(u,e(u))$构成的曲线，选取充分大的 u 作为阀值，使得当 $z\geq u$ 时 $e(\cdot)$为近似线性函数。如果平均超额函数图当 $z\geq u$ 时是向上倾斜的，说明数据遵循形状参数 ξ 为正的 GPD 分布；如果平均超额函数图当 $z\geq u$ 时是向下倾斜的，说明数据来源于尾部较短的分布；如果平均超额函数图当 $z\geq u$ 时是水平的，则说明该数据来源于指数分布。

2.2 POT 模型的贝叶斯估计

参数 ξ 和 β 的确定对 POT 模型的估计至关重要，常用的有极大似然估计、矩法估计、概率权重估计等方法，其中极大似然方法使用得最多，但这些方法都是基于经典统计学的推断方法，有自身的不足[22]。与贝叶斯估计相比，经典统计学的极大似然估计方法主要存在下面的问题：（1）极大似然估计方法在求解有约束最大化时存在一定的困难，比如当参数的真值接近值域的边界时难于收敛，另外求解结果对初始值比较敏感；（2）实际中感兴趣的往往不是参数本身，而是它们的一个高度非线性化的函数，这导致极大似然估计方法不得不使用 delta 方法或自助抽样方法来确定这些参数的置信区间，而这是相当困难和耗时的；（3）极大似然估计的渐近最优条件是否满足很难证明，同时要满足极大似然估计的渐近最优要求，也要求大样本数据，而这在实际中特别是极值估计时是很难满足的；（4）当考虑多体制 GARCH 或混合分布时，因为有些正则条件遭到了破坏，极大似然估计很难确定体制和混合的数目。

2.2.1 后验分布的确定

由(8)式可知样本的似然函数即联合条件密度函数为：

$$L(y\,|\,\xi,\beta)=\frac{1}{\beta^{n_u}}\prod_{i=1}^{n_u}\left(1+\frac{\xi}{\beta}y_i\right)^{-(1+\xi)/\xi} \tag{12}$$

式中，y_i 为超阈值量 $Y=\{z-u\,|\,z>u\}$ 的观测样本。

在进行贝叶斯估计之前，应选取一个合适的先验分布。由于贝叶斯因子对无信息先验中超参数的选择

相当敏感，特别是无信息先验还会带来后验的不稳定以及 Gibbs 抽样的收敛问题，因此在贝叶斯计算中建议采用有信息先验[23]。设 ξ 与 β 相互独立，参照国内、外先验分布的选取方法，本文选择以下的信息先验：

$$\xi : N(\mu,\sigma^2), \mu>0, \sigma>0 \qquad \beta : IG(a,b), a>0, b>0 \tag{13}$$

其中，超参数可以根据历史数据整理加工再利用矩法估计获得。于是，参数的联合后验分布为 $\pi(\xi,\beta \mid y) \propto L(y \mid \xi,\beta) p(\xi) p(\beta)$，其中 $p(\xi)$ 与 $p(\beta)$ 是两个参数的边际先验密度函数。则由(12)式和(13)式可知参数的后验分布可写为:

$$\pi(\xi,\beta|\mathrm{y}) \propto \beta^{-(\alpha+1+n_u)} \exp\left(-\frac{b}{\beta}-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\prod_{i=1}^{n_u}\left(1+\frac{\xi}{\beta}y_i\right)^{-(1+\xi)/\xi} \tag{14}$$

2.2.2 贝叶斯估计值的计算

平方损失下，参数的贝叶斯估计就是其相应的后验均值，而计算后验均值可归结为后验分布的积分计算。从(14)式看，后验分布是一个复杂的二维非标准形分布，无法直接计算其均值。但可借助近年来发展迅速且行之有效的一种贝叶斯计算方法即马尔可夫链蒙特卡罗(MCMC)模拟方法在计算机上实现模拟计算。MCMC 方法的基本思想是通过建立一个平稳分布为 $\pi(\xi,\beta|\mathrm{y})$ 的马尔可夫链来模拟获得样本，然后基于这些样本进行各种统计推断，如计算后验均值、后验方差等[24]。

最简单、应用最广泛的 MCMC 方法是 Gibbs 抽样，其中单元素 Gibbs 抽样因只涉及单变量抽样而最具吸引力，此处拟采用单元素 Gibbs 抽样来计算后验均值[24]。要进行 Gibbs 抽样，首先需要写出后验分布(14)式 的满条件分布：

$$\pi(\xi|\,\beta,\mathrm{y}) \propto e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\prod_{i=1}^{n_u}\left(1+\frac{\xi}{\beta}y_i\right)^{-\frac{1+\xi}{\xi}},\quad \pi(\beta|\,\xi,\mathrm{y}) \propto \beta^{-(a+1+n_u)}\mathrm{e}^{-\frac{b}{\beta}}\prod_{i=1}^{n_u}\left(1+\frac{\xi}{\beta}y_i\right)^{-\frac{1+\xi}{\xi}} \tag{15}$$

在给出初始值 $(\xi^{(0)},\beta^{(0)})$ 后，假定第 t 次迭代开始时的估计值为 $(\xi^{(t-1)},\beta^{(t-1)})$，则第 t 次迭代分为如下两步进行：(1)由满条件分布 $\pi(\xi|\,\beta^{(t-1)},\mathrm{y})$ 抽取 $\xi^{(t)}$；(2)由满条件分布 $\pi(\beta|\,\xi^{(t-1)},\mathrm{y})$ 抽取 $\beta^{(t)}$。这样就得到了一个平稳分布为(14)的马尔可夫链，且实现值为 $(\xi^{(t)},\beta^{(t)})$。在这样得到的马尔可夫链中每隔一段距离计算一次参数的遍历均值，当遍历均值稳定后，Gibbs 抽样就可以停止了。从而，可以利用这些参数的模拟样本的均值来估计后验均值。

还需要说明的是，在对满条件分布进行抽样时，由于此两分布不是常见的分布而无法直接抽样，故需采用其它一些抽样技术来抽取其样本。此处选用筛选抽样方法[24]，其基本原理如下：要从密度函数 $p(x)$中抽样，如果可以将 $p(x)$表示成 $p(x)=c\,h(x)\,g(x)$，且 $h(x)$ 是一个易于抽样密度函数，而 $0<g(x)\le 1$，$c\ge 1$ 是常数，则 X 的抽样可如下进行：(1)由 $U(0,1)$抽取 u^*，由 $h(y)$ 抽取 y；(2)如果 $u^*\le g(y)$，则 $x=y$；否则，回到(1)。

利用以上方法对上面两个满条件分布进行抽样时，c 均取常数 1，$h(x)$分别是正态分布和倒 Gamma 分布从而易于抽样，而 $g(x)=\prod_{i=1}^{n_u}(1+y_i\,\xi/\beta)^{-(1+\xi)/\xi}$ 显然也满足条件，故可以对(15)进行抽样。

3 VaR 的计算和评估

电力的特殊属性导致电价序列存在较强的相关性，不能满足 EVT 要求样本数据独立同分布的假定。因此，本文采用 McNeil 和 Frey[25]提出的处理方法，首先利用灰色 GM(1,2)模型来过滤电价序列的相关性、多季节性、异方差性、有偏性和尖峰厚尾性，得到（近似）独立同分布的残差序列$\{\varepsilon_t\}$，然后再利用 EVT 来描述$\{\varepsilon_t\}$的尾部分布，以期更好地刻画电价分布的尖峰厚尾特征，提高 VaR 的估计精度。

3.1 GM(1,2)-POT-VaR 估计模型

VaR 是一种以规范的统计技术综合衡量市场风险的方法，是国际上通行的风险计量技术。VaR 是指市

场正常波动条件下，在一定置信水平下，某一资产组合在未来特定的一段时间内面临的最大可能损失[5]：

$$VaR_p = \inf\{x \in R \mid \text{Prob}(\Delta P \geq x) \leq 1-p\} \tag{16}$$

式中，Prob( )表示概率，ΔP 为资产在持有期的损益，VaR_p 为置信水平 p 下资产处于风险中的价值。

设电力公司在某一时期 t 的电力需求为 Q_t，零售电价为 P_0，现货电价 p_t=E(p_t|I_{t-1})+ε_t，其中 E( )表示条件期望，I_{t-1} 表示直到 $t-1$ 期的可用信息集，ε_t 为不确定因素导致的随机扰动，满足 E(ε_t)=0，E($\varepsilon_t\varepsilon_s$)=0，$\forall t \neq s$，则电力公司 t 期的经营损失为：

$$\Delta P_t = Q_t(\text{E}(p_t \mid \text{I}_{t-1}) + \varepsilon_t - P_0) \tag{17}$$

零售电价 P_0 是电力监管部门核定的管制电价，电力需求 Q_t 可以进行精确预测（误差一般在 3%以下[2,3]），因此 Q_t 和 P_0 均可视为常数。若 ε_t 基于可用信息集 I_{t-1} 的条件密度函数为 $f_\varepsilon(\varepsilon_t \mid \text{I}_{t-1})$，电力公司第 t 期的风险价值为 $VaR_{p,t}$，则对于给定置信水平 p 有：

$$\begin{aligned} 1-p &= \text{Prob}(\Delta P_t \geq VaR_{p,t}) = \text{Prob}(Q_t(\text{E}(p_t \mid \text{I}_{t-1}) + \varepsilon_t - P_0) \geq VaR_{p,t}) \\ &= \text{Prob}\left(\varepsilon_t \geq \frac{VaR_{p,t} - Q_t(\text{E}(p_t \mid \text{I}_{t-1}) - P_0)}{Q_t}\right) = \int_{\frac{VaR_{p,t} - Q_t(\text{E}(p_t \mid \text{I}_{t-1}) - P_0)}{Q_t}}^{\infty} f_\varepsilon(x \mid \text{I}_{t-1})dx \end{aligned} \tag{18}$$

因此

$$VaR_{p,t} = Q_t\left(\text{E}(p_t \mid \text{I}_{t-1}) - P_0 + F_\varepsilon^{-1}(p \mid \text{I}_{t-1})\right) \tag{19}$$

式中，F_ε( )为 ε_t 的条件分布函数，$F_\varepsilon^{-1}(\cdot)$ 为 F_ε( )的反函数，也称为分位数函数。

现货电价具有信息不完全和不确定的性质，符合灰色变量的特征，可采用 (6)和(10) 式估计出现货电价的期望值 E(p_t|I_{t-1})和残差序列 ε_t 的 p 分位数，进而根据 (19) 式计算出电力公司第 t 期的的风险价值 $VaR_{p,t}$。

3.2 VaR 估计的回测检验

回测检验是将 VaR 的预测值与相关资产损益的历史数据进行比较，以检测实际损失与预期损失是否一致的统计方法。本文通过测度实际失败率与预期失败率是否一致来对 VaR 估计的有效性进行回顾测试。实际失败率定义为失败次数与观察次数的比值，失败次数是指实际观察值超过预测 VaR 的次数。若模型设定正确，则实际失败率应该等于计算 VaR 时指定的置信度 1-p。

Kupiec 统计检验方法[26]是目前应用非常广泛的一种回顾测试方法。设样本容量为 T，N 表示电价的实际观察值超过预测 VaR 的次数，如果置信度 1-p 下用于计算 VaR 的模型正确的话，则 $I_t, \forall t \in [1,T]$ 应该服从概率为 1-p 的二项式分布。因此可以定义零假设 $N/T = 1-p$ 来检验实际失败率是否在统计意义上等于期望失败率。如果零假设正确的话，则可以证明以下的似然比 LR

$$LR = -2\log\left((1-p)^N p^{T-N}\right) + 2\log\left(\left(\frac{N}{T}\right)^N \left(1-\frac{N}{T}\right)^{T-N}\right) \tag{20}$$

满足自由度为 1 的 χ^2 分布。也就是说，在指定的显著性水平下，如果所计算的 LR 检验值大于该显著性水平下自由度为 1 的 χ^2 分布的临界值，则应拒绝零假设；反之，则应接受零假设，即认为所采用的 VaR 计算模型足够准确。

4 PJM 电力市场实证研究

本文的研究样本来源于美国 PJM 电力市场 2007 年 6 月 1 日至 2010 年 9 月 9 日的日平均现货电价和日平均负荷，样本总数为 1197。表 1 给出了日平均现货电价和日平均负荷序列的描述性统计结果。从表 1 可看出，两个样本的偏度系数和峰度系数都显著异于正态，现货电价和负荷序列均呈现明显的右偏形态，同时具有较为明显的尖峰厚尾特征。J-B 统计量非常显著，说明样本期间内现货电价和负荷的分布具有非正态性。

表 1 样本数据的描述性统计结果

统计量	电价($/MWh)	负荷(GW)
均 值	53.52041	81.19221
中 值	49.97068	79.89221
最大值	189.6557	115.7839
最小值	24.87494	58.34586
标准差	20.20158	10.50560
偏 度	1.420081	0.375318
峰 度	6.594566	2.582759
J-B 统计量	1046.748	36.78506
P 值	0.000000	0.000000

4.1 GM(1,2)模型的估计结果

考虑到现货电价序列具有显著的周周期特性，为提高 GM(1,2)模型的过滤效果，获得统计特性更好的近似独立同分布残差序列，本文将数据窗口长度选择为 7，图 1 给出了 GM(1,2)模型的估计结果。从图 1 可以看出，GM(1,2)模型的估计值与实际观测值符合较好，能反映出电价的基本变化规律，但尖峰和低谷时段的估计误差较大，主要原因是此时的市场出清电价受发电厂商的竞争策略影响较大，非常不稳定。

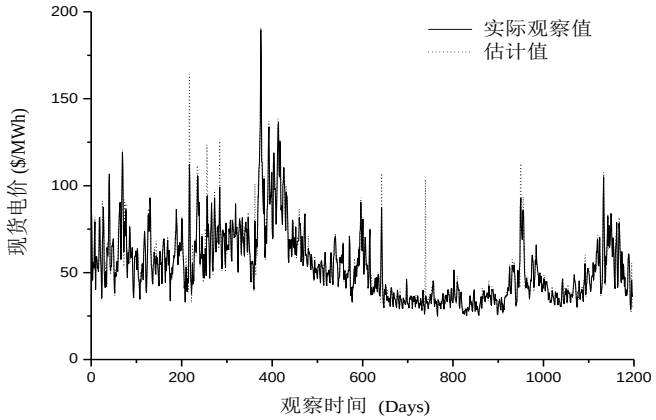


图 1 灰色 GM(1,2)模型的估计结果

表 2 给出了残差及其平方序列的 Q 统计量及相应的概率值。从表 2 可以看出，残差序列平方滞后 6 级和 24 级的 Q 统计量均不显著，表明残差序列已经不存在波动聚集现象；残差序列滞后 6 级和 24 级的 Q 统计量远小于日平均现货电价序列，但仍存在一定的弱相依性，因此残差序列是一个不存在波动聚集的弱相依平稳序列，满足 EVT 建模的前提条件[27]。

表 2 残差序列的 Ljung-Box 检验

统计量	电价($/MWh)	残差($/MWh)
Ljung-Box Q(6)	3868.28(0)	28.87(0.00007)
Ljung-Box Q(24)	11348.94(0)	51.21(0.001)
Ljung-Box Q2(6)	3117.13(0)	1.37(0.96756)
Ljung-Box Q2(24)	7892.50(0)	3.62(0.99999)

4.2 GM(1,2)-POT-VaR 模型估计结果

图 2 给出了残差的平均超额函数图。从图中可见当阈值 u 位于 3.837 左右时，样本平均超额函数 $e(\cdot)$为近似线性，因此本文取阈值 u 为 3.837，相应的超额值个数为 119，占整个样本的比例为 9.94%，这也与文献[25]建议取样本容量的 5-10%作为超额数据相符。

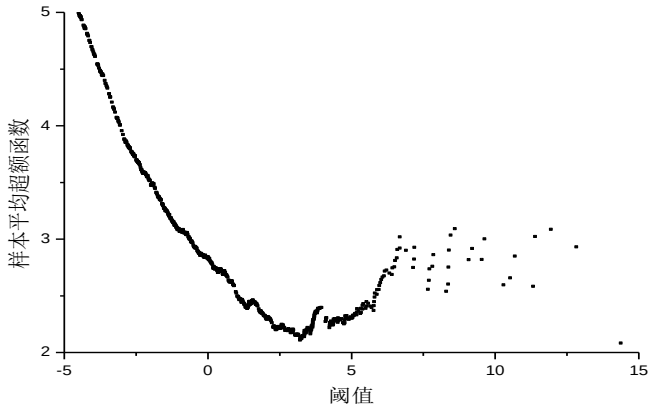


图 2 残差的样本平均超额函数图

阈值 u 选定之后，将超过阈值 u 的残差作为 GPD 分布的样本数据，利用贝叶斯估计即可得到 GPD 分布的形状参数 ξ 和尺度参数 β 的估计值。将 ξ 和 β 的估计值代入式(10)，即可估计出给定置信水平 p 下的分位数，如表 3 所示。从表 3 可以看到，由于贝叶斯方法把参数看作是随机变量，这实际上是在资产的收益率分布中增加了不确定性因素，因此计算出的风险值一般大于把参数看作固定值时的风险值。

表 3 GPD 参数及分位数的估计结果

估计方法	形状参数	尺度参数	置信水平	分位数
贝叶斯	0.067159	2.320563	95.0%	5.469299
			97.5%	7.193597
			99.0%	9.599735
			99.5%	11.52085
最大似然	0.023371	2.333667	95.0%	5.453875
			97.5%	7.111029
			99.0%	9.343275
			99.5%	11.06395

图 3 给出了在超过阀值时，残差上尾部的 GPD 分布与实际分布的对比情况。从图 3 可以看出，GPD 分布很好地拟合了残差的实际分布。

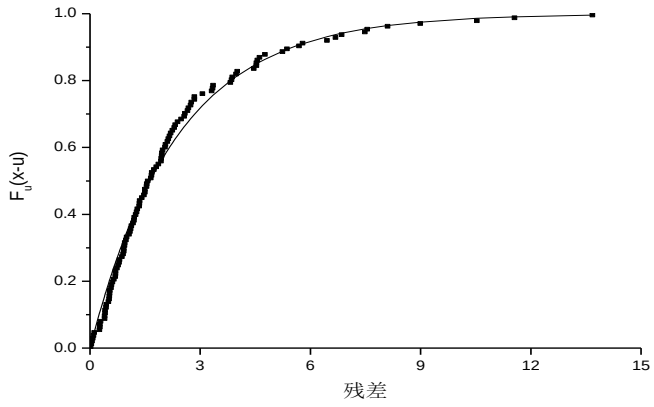


图 3 残差的实际与拟合 GPD 分布

4.3 VaR 估计结果及回测检验

假设电力公司的负荷需求 Q_t 和零售电价 P_0 分别等于 1 和 0。将 5.1 和 5.2 节的计算结果代入式(19)，即

可估计出各置信水平下的 VaR。表 4 给出了本文与文献[16,17]的 VaR 估计结果与实际损失覆盖程度的 Kupiec 检验。从表 4 可以看出，GM(1,2)-POT-VaR 模型在各置信水平下的估计结果均不能拒绝零假设，能对现货电价的变化做出比较迅速的反应，表现出了良好的动态特性，较好地描述了电价的波动风险。但由于 GM(1,2)模型比文献[16，17]的 GARCH 类模型更易处理，计算量大大降低，进一步提高了电力市场参与者使用 VaR 进行风险管理的能力。

表 4 VaR 估计结果的回测检验

置信水平	估计模型	GARCHSK[17]	GARCH-st[16]	GM(1,2)-MLE	GM(1,2)-Bayesian
95%	期望次数	60	60	60	60
	失败次数	59	60	59	59
	LR	0.013	0.000	0.013	0.013
97.5%	期望次数	30	28	30	30
	失败次数	28	30	28	25
	LR	0.013	0.000	0.013	0.880
99%	期望次数	12	12	12	12
	失败次数	13	13	12	11
	LR	0.087	0.087	0.000	0.082
99.5%	期望次数	6	6	6	6
	失败次数	7	6	7	5
	LR	0.164	0.000	0.164	0.173

5 结束语

电力商品的特殊性导致电力价格比传统商品价格的波动更加剧烈，如何有效地识别、评估、控制电力市场价格风险尤为重要。本文从电价的基本特征及其影响因素出发，采用灰色系统理论的 GM(1,2)模型对电价序列进行预处理，以便有效地过滤电价序列的相关性、多季节性和波动集聚性，获得统计特性更好的独立同分布残差序列，然后运用 POT 模型来描述 GM(1,2)模型残差的尾部分布特征，进而精确地估计电力公司的 VaR。基于 PJM 电力市场历史数据的实证分析表明：该模型能对现货电价的变化做出迅速的反应，VaR 估计结果在各置信水平下均准确有效，其计算量远小于现有的两阶段 VaR 计算模型，进一步提高了电力市场参与者使用 VaR 进行风险管理的能力。

REFERENCES

[1] LIU Baohua, WANG Dongrong, SHU Anjie. Reconsideration on the energy crisis in California [J]. Automation of Electric Power System, 2007, 31(7): 1-5

[2] ZHANG Fuqiang, ZHOU Hao. Financial risk analysis in electricity market by analytical approach [J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2004, 16(3): 23-26

[3] LI Ming, ZHANG Qiang, SI Yung. Evaluating short-term financial risk based on Delta model for hydropower plants [J]. Power System Protection and Control, 2010, 38(14): 12-15, 27

[4] ZHONG Bo, LI Huamin. Financial risk analysis of electricity market by a copula based approach [J]. Journal of Shanxi Normal University (Natural Science Edition), 2007, 21(2): 15-19

[5] LIAO Jing, JIANG Hui, PENG Jian-chun, et al. Risk assessment on bidding strategy of power generation companies based on VaR and CVaR method [J]. Relay, 2007, 35(11): 30-34

[6] HUANG Renhui, ZHANG Ji, ZHANG Lizi, LI Zhaoli. Price risk forewarning of electricity market based on GARCH and VaR theory [J]. Proceedings of the CSEE, 2009, 29(19): 85-91

[7] Zhang X B. A Long-term price risk early-warning model of electricity company based on EGARCH and VAR [C]. 2010 International Conference on Advances in Energy Engineering, 19-20 Jun. 2010, Beijing, China: 295-298

[8] Hartz C, Mittnik S, Paolella M. Accurate value-at-risk forecasting based on the normal-GARCH model [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2006, 51(4): 2295-2312

[9] WANG Mianbin, TAN Zhongfu, ZHAN Rong. Purchase power portfolio model and an empirical analysis based on risk measure with fractal value-at-risk [J]. Proceedings of the CSU-EPSA, 2009, 21(6): 11-16

[10] WANG Ruiqing, WANG Hongfu, WANG Xian, LI Yuzeng．Calculating value-at-risk of electricity market considering the time-varying features of distribution's parameters [J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(24): 46-52

[11] Wang Ruiqing, Wang Fuxiong, GUO Xiaojiao. Research on price risk of electricity market based on GARCH model [J]. Journal of Hainan Normal University (Natural Science), 2012, 25(1): 36-40

[12] De Rozario R. Estimating value at risk for the electricity market using a technique from extreme value theory, University of New South Wales, 15 Nov. 2011. [http://www.sal.tkk.fi/publications/pdf-files/eleh07.pdf]

[13] Bystrom H N E. Extreme value theory and extremely large electricity price changes [J]. International Review of Economics and Finance, 2005, 14 (1): 41-55

[14] Chan K F, Gray P. Using extreme value theory to measure value-at-risk for daily electricity spot prices [J]. International Journal of Forecasting, 2006, 22(2): 283-300

[15] Gong X S, Luo X, Wu J J. Electricity auction market risk analysis based on EGARCH-EVT-CVaR model [C]. Proceedings of IEEE International Conference on Industrial Technology, Gippsland, Victoria, Australia, 10-13 Feb. 2009: 1-5

[16] WANG Ruiqing, WANG Xian, LI Yuzeng. Risk measure of electricity market based on ARMAX-GARCH model with conditional skewed-t distribution and extreme value theory [J]. East China Electric Power, 2013, 41(6): 1335-1440

[17] WANG Ruiqing, WANG Fuxiong, XU Miaocun. ARMAX-GARCHSK-EVT Model Based Risk Measure of Electricity Market [C]. Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, Xi'an, China, July 26-28, 2013: 8284-8288

[18] DONG Lili, HUANG Dao. Fault diagnosis and prediction based on new information GM(1,1) [J]. Control Engineering of China, 2006, 13(3): 252-255

[19] Balkema A, De Haan L. Residual life time at great age [J]. The Annals of Probability, 1974, 2(5): 792-804

[20] Pickands, J. Statistical inference using extreme order statistics [J]. The Annals of Statistics, 1975, 3(1): 119-131

[21] Gilli M, Kellezi E. An application of extreme value theory for measuring financial risk [J]. Computational Economics, 2006, 27(2): 207-228

[22] Longin FM. From value at risk to stress testing: The extreme value approach [J]. Journal of Banking & Finance, 2000, 24: 1097-1130

[23] Ibrahim J G, Chen M H, Sinha D. Bayesian survival analysis [M]. New York: Berlin Heidelberg, 2001

[24] MAO Shisong, WANG Jinglong, PU Xiaolong. Advanced Mathematical Statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2004

[25] McNeil A J, Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach [J]. Journal of Empirical Finance, 2000, 7(3-4): 271-300

[26] Kupiec P. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models [J]. Journal of Derivatives, 1995, 39(2):73-84

[27] Coles S. An introduction to statistical modeling of extreme values [M]. London: Springer-Verlag, 2001

【作者简介】



王瑞庆（1965-），男，汉族，博士，教授。1982-1986 年就读于河南大学理论物理专业，获理学学士学位；1986-1989 年就读于中国电波传播研究所电磁场与微波技术专业，获工学硕士学位；2005-2008 年就读于上海大学控制理论与控制工程专业，获工学博士学位。主要研究方向为数据挖掘与智能计算、电力市场风险管理、电力金融衍生产品和电力市场均衡。

Email: ayrqwang@163.com